

MATEMÁTICA DISCRETA, 2018-2019. Aritmética Modular

1. Usando el algoritmo de Euclides, calcula $m.c.d.(a, b)$ y una identidad de Bezout para

$$\begin{array}{ll} (i) a = 7469, b = 2464 & (ii) a = 1109, b = 4999 \\ (iii) a = 1485, b = 1745 & (iv) a = 1320, b = 714. \end{array}$$

2. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, prueba que $c \mid a$ y $c \mid b \Leftrightarrow c \mid \text{mcd}(a, b)$.
3. Calcula $\text{mcd}(n, n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ mayor que 1, y calcula $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $\text{mcd}(n, n+1) = u \cdot n + v \cdot (n+1)$ (identidad de Bezout).
4. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid b$ y $c \mid d$, ¿ $(a+c) \mid (b+d)$? Si tu respuesta es afirmativa, demuéstralo, y si es negativa da un contraejemplo.
5. Demuestra que la suma de tres enteros consecutivos cualesquiera es divisible entre 3.
6. Realiza las siguientes operaciones módulo 5 y módulo 6

$$2011 + 56, \quad 36^{1532}, \quad 130 - 51.$$

7. Realiza las siguientes operaciones módulo 7

$$2345 + 214 \cdot 432, \quad 2419 \cdot 987.$$

8. Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{l} a) 3038 - 79^{234} \text{ mód } 5 \\ b) 1022 \cdot 2^{3147} \text{ mód } 7 \end{array}$$

9. ¿En qué dígito termina 2^{64} ? ¿Y 3^{50} ?

10. Halla, si existen, todas las soluciones enteras de las congruencias:

$$\begin{array}{ll} (i) 5x + 2 \equiv 5 \text{ mód } 7 & (ii) 3x + 4 \equiv 5 \text{ mód } 6 \\ (iii) 8x \equiv 0 \text{ mód } 30 & (iv) 24x \equiv 10 \text{ mód } 18 \\ (v) 42x \equiv 39 \text{ mód } 75 & (vi) 27x \equiv 86 \text{ mód } 10 \end{array}$$

11. Encuentra, si existen, las soluciones enteras **positivas** de los siguientes sistemas de congruencias

$$\begin{array}{ll} (i) \begin{cases} x \equiv 3 \text{ mód } 5 \\ x \equiv 4 \text{ mód } 10 \end{cases} & (ii) \begin{cases} x \equiv 3 \text{ mód } 5 \\ x \equiv 4 \text{ mód } 11 \end{cases} \\ (iii) \begin{cases} x \equiv 2 \text{ mód } 10 \\ x \equiv 1 \text{ mód } 7 \end{cases} & (iv) \begin{cases} x \equiv 1 \text{ mód } 7 \\ x \equiv 4 \text{ mód } 5 \end{cases} \\ (v) \begin{cases} 2x \equiv 3 \text{ mód } 15 \\ 5x \equiv 6 \text{ mód } 12 \end{cases} & (vi) \begin{cases} 3x \equiv 10 \text{ mód } 14 \\ 5x \equiv 7 \text{ mód } 16 \end{cases} \end{array}$$

12. Encuentra, si existen, las soluciones enteras **positivas** de los siguientes sistemas de congruencias

$$\begin{array}{ll} (i) \begin{cases} x \equiv 2 \text{ mód } 3 \\ x \equiv 5 \text{ mód } 7 \\ x \equiv 1 \text{ mód } 5 \end{cases} & (ii) \begin{cases} x \equiv 3 \text{ mód } 5 \\ x \equiv 5 \text{ mód } 7 \\ x \equiv 2 \text{ mód } 2 \end{cases} \\ (iii) \begin{cases} x \equiv 4 \text{ mód } 3 \\ x \equiv 5 \text{ mód } 7 \\ x \equiv 2 \text{ mód } 2 \end{cases} & (iv) \begin{cases} x \equiv 2 \text{ mód } 6 \\ 7x \equiv 2 \text{ mód } 8 \\ 3x \equiv 0 \text{ mód } 10 \end{cases} \end{array}$$

13. Encuentra todos los números $n \in \mathbb{N}$ tal que su división por 3, 4 y 5 tenga resto 1, 2 y 3 respectivamente.
14. Calcula todos los números enteros positivos que son múltiplos de 13, que terminan en 4 y tales que al dividirlos por 7 nos da resto 2. ¿Cuál entre todos ellos es el número **natural** más pequeño?
15. Tenemos una colección de sellos de forma que si colocamos los sellos en montones de 10, nos sobran 4 sellos, si los colocamos en montones de 9 nos sobran 6 y si los colocamos en montones de 7 no nos sobra ninguno. ¿Cuántos sellos puede tener la colección? ¿Cuál es el número más pequeño de sellos que tiene la colección?
16. Calcula todos los números enteros x, y que cumplan **simultáneamente** que $x + 2y \equiv 1 \pmod{13}$ y $2x - y \equiv 3 \pmod{13}$. ¿Cuáles entre todos ellos son los números x e y que son los números **naturales** más pequeños?
17. Calcula todos los números enteros **positivos** $x, y \in \mathbb{Z}$ de forma que $3x - 2$ es múltiplo de 25 y las dos últimas cifras de $4x + 15y$ son 16. ¿Existen $x, y \in \mathbb{Z}$ cumpliendo lo anterior y además que $0 \leq x \leq y \leq 50$? Razona tus respuestas y, en caso afirmativo, calcúlalos.
18. La letra asociada al número del DNI (NIF = número + letra) es el resultado de expresar dicho número módulo 23 y asociar a cada resultado una letra según la siguiente tabla:

0 ↔ T	1 ↔ R	2 ↔ W	3 ↔ A	4 ↔ G	5 ↔ M
6 ↔ Y	7 ↔ F	8 ↔ P	9 ↔ D	10 ↔ X	11 ↔ B
12 ↔ N	13 ↔ J	14 ↔ Z	15 ↔ S	16 ↔ Q	17 ↔ V
18 ↔ H	19 ↔ L	20 ↔ C	21 ↔ K	22 ↔ E	

- (i) Comprueba que la letra que tú tienes asociada está calculada correctamente.
- (ii) En una oficina tienen una fotocopia algo borrosa del DNI de un cliente en la que su número de NIF se lee de la siguiente manera:

NIF : 94 176 721 – Y.

(la interrogación representa un dígito que no se puede leer). ¿Podrías deducir el dígito que no hemos podido entender? En caso afirmativo dedúcelo y en caso negativo explica por qué no se puede.